Geometria I

27 marzo 2012

Esercizio 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ è data la conica $\mathscr{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

(a) Detti P il generico punto di $\mathscr{C}$, A il punto di coordinate $(4; 0)$ e A' il simmetrico di A rispetto a P, determinare un'equazione cartesiana del luogo $\mathscr{L}$ descritto dal punto A' al variare di P sulla conica $\mathscr{C}$.[$x^2 + y^2 = 4$] $\boxed{4}$

(b) Dopo aver verificate che una possibile equazione per $\mathscr{L}$ è la seguente

$$x^2 + y^2 = 4,$$

costruire il fascio $\mathscr{F}$ di coniche generato da $\mathscr{L}$ e dalla conica di equazione

$$x^2 + 4y^2 + 4xy - y = 0.$$

Determinare le equazioni delle parabole e dell'iperbole equilatera di $\mathscr{F}$ e verificare che gli assi di tali parabole risultano essere paralleli all'asse dell'iperbole equilatera.[Fascio: $(k+1)x^2+(k+4)y^2+4xy-4k-y = 0$, parabole: $x^2+4y^2+4xy-y = 0$, $4x^2+y^2-4xy+y-20 = 0$, iperbole eq.: $3x^2 - 3y^2 - 8xy + 2y - 20 = 0$ direzioni assi parabole: $(2, -1, 0), (1, 2, 0)$] $\boxed{4}$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, siano P il punto di coordinate $(0; 0; 3)$, π il piano di equazione $x + 4y - z = 1$ e A e B i punti di coordinate $A(1; 2; 3)$, $B(1; 1; 5)$.

(a) Determinare un'equazione parametrica della retta r passante per P, parallela al piano π e perpendicolare alla retta s passante per A e B. [$\begin{cases} x = -7t + 21 \\ y = 2t - 6 \\ z = t \end{cases}$] $\boxed{3}$

(b) Stabilire, al variare del parametro reale k, le posizioni reciproche tra la retta r e la retta t, di equazioni cartesiane:

$$t \ : \ \begin{cases} x - kz - 1 + 2k = 0 \\ x + y - (k + 2)z + 2k + 3 = 0 \end{cases}$$

[Sghembe per $k \neq -7$, altrimenti parallele.] $\boxed{2}$

(c) Posto $k = 0$, determinare le equazioni cartesiane dei due piani paralleli a cui appartengono le rette r e t (siano essi, rispettivamente, α e β).[$\alpha :\ y - 2z + 6 = 0,\ \beta :\ y - 2z + 4 = 0$] $\boxed{2}$

(d) Sempre per $k = 0$, determinare le equazioni della proiezione ortogonale della retta r sul piano β. [$\begin{cases} 5x + 14y + 7z + 111 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$] $\boxed{2}$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, sia k un parametro reale e sia M la matrice

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & k^2 - 2k - 2 & 6 \\ k & -\frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare:

(a) al variare di $k \in \mathbb{R}$, il nucleo e l'immagine di $f = L_M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (le rispettive basi e dimensioni); [se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$, allora $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ (base canonica), $\ker f = \{\vec{0}\}$. Se $k = 0$, allora $\operatorname{Im} f = < (1, -2, 0) >$ e $\ker f = < (1, 2, 0), (0, 3, 1) >$. Se $k = 2$, allora $\operatorname{Im} f = < (1, -2, -1), (-3, 6, 0) >$ e $\ker f = < (1, 2, 0) >$.] $\boxed{5}$

(b) i valori di k per i quali il vettore $\vec{v} = (k, 0, k)$ appartiene all'immagine di f;[$k \neq 2$] $\boxed{3}$

(c) per $k = 3$, le preimmagini di $\vec{v}$;[$\left(2, 2, -\frac{5}{3}\right)$] $\boxed{2}$

(d) i valori di k per i quali la matrice M ammette un autovalore nullo. Posto $k = 0$, discutere la diagonalizzabilità della matrice e, se possibile, diagonalizzarla, indicando anche la matrice diagonalizzante. [Ammette autovalore nullo per $k = 0, k = 2$. Per $k = 0$ la matrice è diagonalizzabile e si ha $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$] $\boxed{5}$